

# PRÍBEH S OTVORENÝM KONCOM: UVÄZNIENIE FARBY V KVANTOVEJ CHROMODYNAMIKE NA MRIEŽKE \*

## STORY WITH AN OPEN END: COLOUR CONFINEMENT IN LATTICE QUANTUM CHROMODYNAMICS

Štefan Olejník,

Fyzikálny ústav SAV, Dúbravská cesta 9, SK-845 11 Bratislava, Slovenská republika,  
e-mail: stefan.olejnik@savba.sk

*Cieľom článku je stručne zhrnúť niektoré výsledky výskumu mechanizmu uväznenia farby v kvantovej chromodynamike na mriežke, s dôrazom na úlohu centra kalibračnej grupy a tzv. centrálnych vortexov.*

### SILNÉ INTERAKCIE A KVANTOVÁ CHROMODYNAMIKA

Fyzika silných interakcií elementárnych častíc sa v súčasnosti nachádza v paradoxnej situácii. Na jednej strane málokto pochybuje o tom, že správny teoretický opis silných interakcií poskytuje teória, ktorá sa nazýva *kvantová chromodynamika* [1] (angl. *quantum chromodynamics, QCD*)<sup>1,2</sup>. Neexistujú žiadne experimentálne údaje, ktoré by protirečili predpovediam, ktoré vyplývajú z QCD; naopak, budúce experimenty, napr. na zariadení LHC v CERN, už neplánujú *overovať* predpovede QCD, pre ne táto teória predstavuje iba prostriedok na odhad vplyvu *pozadia* pri hľadaní “novej fyziky”. Za objav veľmi dôležitej vlastnosti QCD, tzv. *asymptotickej voľnosti*, bola v roku 2004 udelená Nobelova cena za fyziku [8]. Jednoducho, QCD je pevnou súčasťou dnešnej fyzikálnej paradigmy mikrosveta.

Na druhej strane, QCD opisuje silné interakcie ako dôsledok vzájomného pôsobenia medzi kvarkami a gluónmi, pričom však nik tieto objekty nepozoroval ako voľné častice. Vo svete okolo nás nájdeme zo silnointeragujúcich častíc iba protóny a neutróny, iba ony

\*Text napísaný pre *Československý časopis pre fyziku*.

<sup>1</sup>V práci [1] bola sformulovaná iba zárodočná myšlienka QCD, k vzniku teórie však prispeli mnohí autori. Záujemcom o podrobnosti odporúčame nedávny Grossov článok [2], v ktorom je opísaný stav teoretickej a experimentálnej scény fyziky elementárnych častíc na prelome 60. a 70. rokov a zhrnuté príspevky hlavných tvorcov modernej teórie silných interakcií.

<sup>2</sup>Viacero referatívnych článkov v tomto časopise sa podrobne zaoberalo témami a problémami, ktoré súvisia s obsahom dnešného príspevku. Podrobnejší úvod do QCD je možné nájsť v článkoch [3, 4]. Pojem renormalizácie v kvantovej teórii poľa tu osvetlili Chýla a Kotecký [5]. Formulácia kvantovej teórie poľa cez Feynmanove dráhové (kontinuálne) integrály a súvisiace otázky boli diskutované v Janišovom článku [6]. Konečne, mriežková formulácia QCD bola súčasťou príspevku Koteckého a Chýlu [7]. Aj keď sa jedná o staršie články, väčšina podstatných informácií v nich je stále aktuálna.

a ďalšie hadróny tiež registrujú detektory časticových experimentov. Vysvetlenie tejto skutočnosti poskytuje *hypotéza o uväznení farby*: Kvarky a gluóny sú nositeľmi silného náboja (fyzici ho nazvali poeticky *farbou*), pričom kvarky sa vyskytujú v prírode v troch farbách a gluóny v ôsmich. Za normálnych podmienok sa v prírode nachádzajú iba bezfarebné častice, častice s nulovým silným nábojom (v matematickom jazyku: singlety voči transformáciám z farebnej grupy). Sú to viazané stavy troch kvarkov (baryóny, napr. protón alebo neutrón), troch antikvarkov (antibaryóny, napr. antiprotón), kvarku a antikvarku (mezóny, napr.  $\pi$ -mezón), dvoch alebo troch gluónov (gluóniá, ktorých existencia nebola doteraz presvedčivo dokázaná) a možno iné (napr. pentakvarkové stavy, nedávno pozorované v niektorých experimentoch, no doteraz jednoznačne nepotvrdené).

Pre reálnu existenciu kvarkov a gluónov a zároveň platnosť hypotézy o uväznení existuje celý rad experimentálnych i teoretických indícií. Tie však nikdy nie sú nespochybniteľné, preto matematický dôkaz uväznenia ostáva zaujímavým problémom – natoľko páľčivým a závažným, že ho Clayov matematický ústav [9] zaradil medzi sedem “problémov tisícročia”, pričom za vyriešenie každého z nich vypísal odmenu milión amerických dolárov.

Skutočnosťou, ktorá robí problém uväznenia tak ťažkým, je nemožnosť využiť na jeho riešenie dobre rozpracované *poruchové* metódy kvantovej teórie poľa. Teória porúch sa dá aplikovať na výpočet predpovedí QCD pre vysokoenergetické silné procesy, v ktorých je – vďaka asymptotickej voľnosti [8] – efektívna interakčná konštanta medzi kvarkami a gluónmi malá. V celom rade zaujímavých problémov je však relevantná oblasť nižších energií (t.j. veľkých hadrónových vzdialeností), kde je interakcia naozaj silná a poruchové metódy sú nevhodné. Tieto – medzi nimi problém uväznenia,

ako aj presný výpočet hmotností, širok rozpadu a iných vlastností mezónov a baryónov z charakteristík kvarkov a gluónov – si vyžadujú metódy iné, *neporuchové*.

Jedna z najrozpracovanejších neporuchových metód skúmania kvantovej teórie poľa (vo formulácii pomocou dráhových integrálov), ktorú v roku 1974 navrhol Wilson [10], využíva nahradenie časopriestorového kontínuua diskretnou mriežkou v čase i priestore. Rozličné pozorovateľné veličiny je potom možné počítať na počítači metódou Monte Carlo. Pred vyše 20 rokmi takto Creutz [11] ukázal, že potenciál medzi kvarkom a anti-kvarkom rastie priamo úmerne ich vzdialenosti, čo signalizuje uväznenie kvarkov. Počítačové simulácie QCD na mriežke okrem toho poskytli rad predpovedí hmotností a iných vlastností hadrónov z prvých princípov.

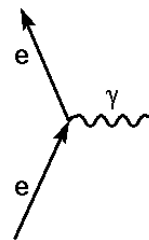
Cieľom každej teórie, pochopiteľne aj QCD na mriežke, je určiť hodnoty fyzikálne merateľných veličín s čo najväčšou presnosťou. Vzorom je kvantová elektrodynamika, ktorej predpovede dosahujú presnosť rádu milióntín až desaťmilióntín. V numerických simuláciách QCD existuje celý rad zdrojov štatistických a systematických chýb. Zmenšenie chýb si vyžaduje simulovať teóriu na stále výkonnejších počítačoch: ich výkon dnes nezriedka dosahuje niekoľko teraflopov (t.j. niekoľko biliónov operácií za sekundu). Na mieste je teda otázka, či v tejto oblasti ešte existujú problémy, ktoré možno riešiť aj na menej výkonných počítačoch alebo bez nich.

Odpoveď je našťastie kladná: Konečným cieľom teórie sú síce *čísla*, kvantitatívne predpovede fyzikálnych veličín, nemenej dôležité je však aj kvalitatívne *chápanie* fyzikálnych javov a procesov, napr. uväznenia kvarkov alebo narušenia chirálnej symetrie. Takéto problémy sa dajú skúmať aj na zjednodušených modeloch, často použitím analytických metód alebo pomocou výkonnejších osobných počítačov a pracovných staníc.

V tomto článku sa pokúsím stručne uviesť niektoré výsledky štúdia mechanizmu uväznenia v simuláciách QCD na mriežke. Najprv ale “letecky” zhniem niekoľko informácií o kvantovej chromodynamike a o základných elementoch jej mriežkovej formulácie. V ďalšej časti uvediem Wilsonovo kritérium pre uväznenie a vysvetlím podstatu dôkazu uväznenia v limite silnej väzby. Neskôr spomeniem niekoľko argumentov o úlohe centra farebnej grupy v mechanizme uväznenia farby. Ďalej zhniem výsledky našej skupiny, ktoré svedčia v prospech modelu uväznenia ako dôsledku kondenzácie tzv. centrálnych vortexov. Konečne, stručne spomeniem aj súvis centrálnych vortexov s inými, zdanlivo úplne odlišnými, predstavami o uväznení.

## ELEMENTY QCD NA MRIEŽKE

Ak by sme chceli zhrnúť definíciu kvantovej chromodynamiky do jedinej rozvitej vety, znela by takto: *Kvan-*

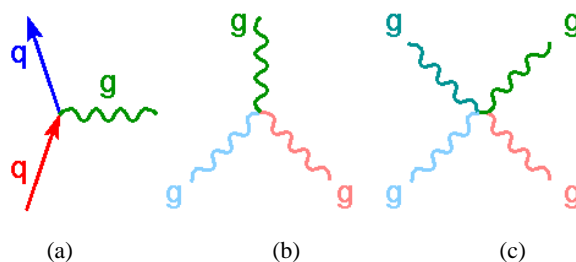


1/ Základný typ interakcie v kvantovej elektrodynamike.

tová chromodynamika je kalibračná teória interakcií farebných kvarkov a gluónov s neabelovskou grupou symetrie SU(3). Takáto veta laickému čitateľovi, ba ani odborníkovi zo vzdialenejšej oblasti fyziky veľa nepovie; pokúsím sa preto najprv vysvetliť niektoré pojmy trochu jednoduchšie.

Kvantová chromodynamika bola sformulovaná v úplnej analógii s kvantovou elektrodynamikou (QED). Základným typom interakcie v QED je proces, v ktorom elektrón zmení svoj stav, hybnosť a energiu tým, že emituje fotón (obr. 1). Podobne v QCD interakciu medzi kvarkami sprostredkujú gluóny. Kvark určitej farby zmení svoju farbu, hybnosť a energiu emitovaním farebného gluónu (obr. 2a). Je tu však podstatný rozdiel. Kým fotón nenesie náboj, je elektricky neutrálny, v QCD má gluón farebný (silný) náboj, a preto okrem základnej interakcie medzi kvarkami a gluónmi existuje aj gluónová samointerakcia (vrcholy na obr. 2b a c). Tá práve zapríčiňuje podstatné odlišnosti medzi QED a QCD.

Základným prvkom konštrukcie QCD je *princíp lokálnej kalibračnej invariantnosti*. Kvarky sa vyskytujú v troch podobách, farbách. Môžeme si predstaviť trojrozmerný priestor farieb s osami  $x$ ,  $y$  a  $z$  ako v obyčajnom priestore. Voľba týchto osí závisí od našej dohody. To, či je kvark *modrý* alebo *zelený* závisí od toho, čo sme nazvali modrou alebo zelenou farbou, ako sme zvolili súradnicové osi vo farebnom priestore. Princíp lokálnej kalibračnej invariantnosti nám hovorí, že v každom bode časopriestoru môžeme smer osí zvoliť ľubovoľne. Nositeľom informácie o tom, aká



2/ Typy interakčných vrcholov v kvantovej chromodynamike.

je relatívna orientácia farebných osí v rôznych bodoch časopriestoru, je gluónové (kalibračné) pole. Zmenu orientácie farebných osí nazývame *kalibračnou transformáciou*, v matematickej reči tieto transformácie tvoria neabelovskú grupu (v QCD sa jedná o kalibračnú grupu SU(3)).

Experimenty ukazujú, že kvarky majú tri farby; pri teoretickom skúmaní QCD má často význam zaoberať sa variantom, v ktorom sú kvarky iba dvoch farieb (farebná grupa je SU(2)) alebo  $N$  farieb (niekedy aj limitou  $N \rightarrow \infty$ ). Stavebnými prvkami  $N$ -farebnej QCD je teda vo všeobecnosti  $N$  kvarkových polí  $q^i(x)$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , ktoré interagujú prostredníctvom  $N^2 - 1$  kalibračných polí  $A_\mu^a(x)$ , kde index  $a \in \{1, \dots, N^2 - 1\}$  a  $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$  označuje smery v časopriestore.

Ústredným objektom teórie je hustota účinku (alebo lagranžian), v prípade QCD je daný nasledovným výrazom

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu} + \bar{q}^i(x) \left\{ \gamma^\mu [i\partial_\mu \delta_{ij} + g A_\mu^a(x) T_{ij}^a] - m_q \delta_{ij} \right\} q^j(x), \quad (1)$$

kde  $m_q$  označuje hmotnosť kvarku,  $\gamma^\mu$  sú Diracove matice,  $T^a$  sú generátory grupy SU( $N$ ) vo fundamentálnej reprezentácii a implicitne sa predpokladá sčítovanie cez všetky druhy ("chute") kvarkov.<sup>3</sup> Tensor pol'a

$$F_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) + g f^{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x) \quad (2)$$

okrem prvých dvoch členov, analogických ako v elektrodynamike, obsahuje nelineárny člen  $g f^{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x)$  ( $f^{abc}$  sú tzv. štruktúrne konštanty grupy SU( $N$ )), ktorý zapríčiňuje samointerakciu gluónových polí. Ak aj teda z teórie vynecháme dynamické kvarkové polia, nedostaneme triviálnu teóriu, stále nám ostane teória interagujúcich gluónových polí. Tá má podobné vlastnosti ako úplná QCD, ale je jednoduchšia. Problém uväznenia existuje rovnako v úplnej QCD ako v teórii bez kvarkov: niet dôvodu predpokladať, že fyzikálny mechanizmus uväznenia bude odlišný. Kvôli jednoduchosti sa v ďalšom budem zaoberať takmer výlučne teóriou bez dynamických kvarkových polí.

Na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že pomocou lagranžianu (1) možno vybudovať kvantovú teóriu pol'a naložiť na klasické polia kánonické komutačné vzťahy. Podobne ako v elektrodynamike však v dôsledku kalibračnej voľnosti nie sú potenciály  $A_\mu^a(x)$  jednoznačne definované, nie všetkým potenciálom pol'a zodpovedajú fyzikálne stupne voľnosti. Aby sme sa zbavili nefyzikálnych polí, musíme *fixovať kalibráciu*. Tým spravidla buď narušíme explicitnú lorentzovskú kovariantnosť

<sup>3</sup>Tu aj na iných miestach sa cez dvakrát opakované indexy sčítuje, napr.  $u^{ab} v^{bc} \equiv \sum_b u^{ab} v^{bc}$ ,  $A^\mu B_\mu \equiv \sum_\mu A^\mu B_\mu$  a pod.

teórie, alebo musíme zaviesť tzv. polia Faddejevových–Popovových duchov. Fixovanie kalibrácie hrá významnú úlohu aj pri odhalení štruktúr, ktoré hrajú dôležitú úlohu v mechanizme uväznenia; tomuto aspektu sa budeme venovať neskôr.

Cieľom v kvantovej teórii pol'a je výpočet kvantových (vákuových) stredných hodnôt operátorov, ktoré zodpovedajú rôznym fyzikálnym veličinám. Pomocou nich možno (prinajmenšom v princípe) vyjadriť veličiny, ktoré sa merajú v experimentoch.

Kvantová stredná hodnota operátora  $\hat{O}$  je zadaná Feynmanovým dráhovým (kontinuálnym) integrálom [6]

$$\langle \hat{O} \rangle = \frac{\int [D\Phi] O[\Phi] \exp(iS[\Phi])}{\int [D\Phi] \exp(iS[\Phi])}. \quad (3)$$

$\Phi$  tu označuje akékoľvek kvantové polia a  $S$  je účinok. Uvedený výraz je len schematický, hodnoty operátora  $\hat{O}$ , ktorý závisí od polí  $\Phi$ , sú v ňom ustreďené cez hodnoty polí s váhovým faktorom  $\exp(iS)$ . Obyčajne je vhodné uskutočniť tzv. Wickovu rotáciu, prechod z priestoru s Minkovského metrikou do euklidovskej metriky zámennou reálneho času na rýdzo imaginárny ( $it \rightarrow \tau$ ), čím rovnica (3) prejde do tvaru

$$\langle \hat{O} \rangle = \frac{\int [D\Phi] O[\Phi] \exp(-S_E[\Phi])}{\int [D\Phi] \exp(-S_E[\Phi])}, \quad (4)$$

kde  $S_E$  je tzv. euklidovský účinok.

Veličiny typu (4) je možné počítať numericky po prechode na časopriestorovú mriežku. Mriežková formulácia kvantovej teórie pol'a pozostáva z nasledujúcich krokov [7, 10]:

1. Spojitý priestor a čas nahradíme diskretnou (obyčajne hyperkubickou) mriežkou v časopriestore s mriežkovou konštantou  $a$ .

2. Fyzikálne polia v spojitom priestore nahradíme poliami definovanými na prvkoch mriežky – v jej uzloch, na spojoch (*linkoch*), elementárnych štvorcoch (*plaketách*) a pod. Účinok teórie nahradíme mriežkovým účinkom, ktorý reprodukuje spojitý výraz v limite  $a \rightarrow 0$ .

3. Systém vložíme do konečného objemu  $V = L^3 \times T$  a na polia naložíme vhodné, napr. (anti-)periodické okrajové podmienky. Pochopiteľne, mriežka by mala byť dostatočne jemná v porovnaní s rozmermi častíc a objem dostatočne veľký.

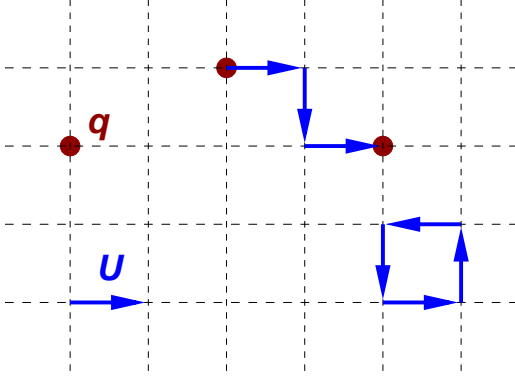
4. Vypočítame dráhové integrály typu (4) – na mriežke sú to mnohonásobné obyčajné integrály – numericky, metódou Monte Carlo.

5. Snažíme sa výsledky extrapolovať do limít  $a \rightarrow 0$  a  $V \rightarrow \infty$ .

Mriežka tu plní trojjedinú úlohu:

1. Umožňuje dať formálnym výrazom typu (3) a (4) presný matematický zmysel.

2. Predstavuje neporučovú regularizáciu kvantovej



3/ Elementy mriezkovej formulácie chromodynamiky.

teórie poľa: na mriežke sú prirodzene odrezané hybnosti  $p \geq \mathcal{O}(1/a)$ . (O renormalizácii a regularizácii kvantových teórií poľa podrobnejšie pojednáva článok [5].)

3. Umožňuje výpočet dráhových integrálov bez použitia poruchovej teórie.

Pri prechode na mriežku je automaticky narušená rotačná a translačná symetria pôvodnej teórie. Za svätý sa považuje princíp lokálnej kalibračnej invariantnosti; mriežková QCD sa konštruuje tak, aby ho spĺňala. Už som spomínal, že kvarkové polia sú v QCD definované v bodoch časopriestoru a interagujú prostredníctvom kalibračných polí, ktoré majú navyše smer. Je preto prirodzené, že aj na mriežke sú kvarkové polia zviazané s uzlami mriežky, kým kalibračné polia “žijú” na spojoch (linkoch) mriežky. Na každom spoji je definovaná matica  $U_\mu(x)$  z grupy  $SU(N)$ . Kalibračne invariantné objekty na mriežke sú uzavreté slučky, vytvorené zo súčinov matíc na spojoch mriežky (presnejšie stopy takýchto súčinov), ako napr. dookola elementárneho štvorca – plaketu (obr. 3, spodný pravý roh), alebo čiary, ktoré začínajú kvarkom a končia antikvarkom, ktoré sú spojené čiarou z linkových matíc (obr. 3 vpravo hore).

Ďalej sa už mriežkovou formuláciou pre kvarky nebudeme zaoberať. Jednak neexistuje metóda na simuláciu kvarkových polí, ktorá by bola súčasne teoreticky uspokojivá a dostatočne efektívna. Diskutovať tento problém mi rozsah príspevku nedovoľuje. Po druhé, ako bolo spomínané vyššie, aj teória čistých kalibračných polí bez dynamických kvarkov je netriviálna a má význam v nej problém uváženia skúmať.

Účinok pre gluónové polia na mriežke je veľmi jednoduchý a nazýva sa *Wilsonov účinok*. Je daný súčtom príspevkov elementárnych plaketí (obr. 3):

$$S_W = \beta \sum_P \left[ 1 - \frac{1}{N} \text{Re Tr}(U_P) \right], \quad (5)$$

kde  $\beta = 2N/g^2$  a  $g$  je väzbová konštanta QCD. V čistej kalibračnej teórii (bez kvarkov) potom numericky

počítame násobné integrály typu:

$$\langle \hat{O} \rangle = \mathcal{N} \int \left[ \prod_{i,\mu} dU_\mu(x_i) \right] O[U] e^{-S_W[U]}. \quad (6)$$

$\mathcal{N}$  je normalizačná konštanta:

$$\mathcal{N}^{-1} = \int \left[ \prod_{i,\mu} dU_\mu(x_i) \right] e^{-S_W[U]}. \quad (7)$$

Konečným cieľom výpočtov na mriežke je získať informácie o správaní študovaného systému v spojitom limite. Matematické a numerické aspekty spojitých limity ďaleko presahujú rámec tejto práce. Naznačím tu len niekoľko intuitívnych a empirických faktov.

V prvom rade si treba uvedomiť, že naša teória na mriežke je určená jednak väzbovým parametrom  $g$  a jednak mriežkovou vzdialenosťou  $a$ . To však neznamená, že každému bodu v  $(g, a)$ -rovine zodpovedá iná teória. Naopak, ukazuje sa, že v nej existujú isté čiary (nazvime ich “izofyzikálne čiary” alebo renormalizačné trajektórie): ak body  $(g_1, a_1)$  a  $(g_2, a_2)$  ležia na jednej izofyzikálnej čiare, tak teória s parametrami  $(g_1, a_1)$  a teória s parametrami  $(g_2, a_2)$  poskytujú rovnaké predpovede pre fyzikálne veličiny. Závislosť  $g$  od  $a$  na izofyzikálnej čiare nám umožňuje vypočítať metóda renormalizačnej grupy [5] a zadáva ju tzv. Gell-Mannova–Lowova rovnica:

$$a \frac{dg}{da} = \beta_{\text{GML}}(g). \quad (8)$$

Funkciu  $\beta_{\text{GML}}(g)$  možno vypočítať poruchovo:

$$\beta_{\text{GML}}(g) = \beta_0 g^3 + \beta_1 g^5 + \mathcal{O}(g^7). \quad (9)$$

$\beta_0$  je kladné,  $\beta_0 = \frac{11}{3} \left( \frac{N}{16\pi^2} \right)$ ,  $\beta_1 = \frac{34}{3} \left( \frac{N}{16\pi^2} \right)^2$  (v čistej  $SU(N)$  teórii bez kvarkov), čo zabezpečuje asymptotickú voľnosť QCD [8], ktorú sme spomínali v úvode.

Riešením rovnice (8) výjde

$$a \approx \frac{1}{\Lambda_L} (\beta_0 g^2)^{-\beta_1/2\beta_0^2} e^{(-1/2\beta_0 g^2)} \equiv \frac{1}{\Lambda_L} f(\beta), \quad (10)$$

kde  $\Lambda_L$  je integračná konštanta s rozmerom hmotnosti, ktorá “indexuje” spomínané izochiary v  $(g, a)$ -priestore.

Zo vzťahu (10) vyplýva, že spojitým limite  $a \rightarrow 0$  v QCD zodpovedá limita  $g \rightarrow 0$  (t.j.  $\beta = 2N/g^2 \rightarrow \infty$ ).

Na mriežke sa vždy merajú bezrozmerné veličiny. Ak napr. chceme určiť nejakú fyzikálnu hmotnosť  $m$ , meriame fakticky súčin  $am$ . V limite  $\beta \rightarrow \infty$  musí platiť

$$am \simeq C f(\beta), \quad \text{t.j.} \quad m \simeq C \Lambda_L. \quad (11)$$

Aby sme rozmerné veličiny vyjadrili vo fyzikálnych jednotkách, treba ešte určiť hodnotu  $\Lambda_L$ . Tú možno fixovať iba porovnaním s experimentálnymi údajmi, napr. vypočítať nejakú veličinu v jednotkách  $\Lambda_L$  na mriežke a porovnať ju s jej hodnotou nameranou v experimente.  $\Lambda_L$  tak vychádza približne 7 MeV.

Treba spomenúť, že v praktických výpočtoch netreba (a ani nie je možné) uskutočniť limitu  $\beta \rightarrow \infty$  ( $g \rightarrow 0$ ). Už pri nie príliš veľkých hodnotách  $\beta$  (v SU(2) teórii už okolo  $\beta \sim 2.4 - 2.5$ ) fyzikálne veličiny začínajú prejavovať škálovacie správanie typu (11). Existencia takéhoto “škálovacieho okna” pri rozumne malých hodnotách  $\beta$  robí simulácie na mriežke prakticky realizovateľnými.

## WILSONOVO KRITÉRIUM UVÄZNENIA

Na skúmanie uväznenia kvarkov Wilson navrhol používať veličinu, ktorá sa zvykne nazývať *Wilsonovou slučkou*. Na mriežke je definovaná ako súčin linkových premenných  $U$  dookola obdĺžnikovej slučky  $\mathcal{C}$  veľkosti  $R \times T$  a jej kvantová stredná hodnota je zadaná integrálom

$$\begin{aligned} \langle W(\mathcal{C}) \rangle &= \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} \left( \prod_{l \in \mathcal{C}} U_l \right) \right\rangle \quad (12) \\ &= \mathcal{N} \int \left[ \prod_{i,\mu} dU_\mu(x_i) \right] \frac{1}{N} \text{Tr} \left( \prod_{l \in \mathcal{C}} U_l \right) e^{-S_W[U]}. \end{aligned}$$

Fyzikálne táto veličina meria *magnetický tok* cez slučku  $\mathcal{C}$  a kreuje *elektrický tok* pozdĺž slučky  $\mathcal{C}$ . Správanie tejto veličiny pre veľké slučky  $\mathcal{C}$  súvisí s tým, či v teórii sú alebo nie sú kvarky uväznené. Vo fáze uväznenia sa riadi *zákonom plochy* (angl. *area law*):

$$\langle W(\mathcal{C}) \rangle \sim \exp(-\sigma \mathcal{A}(\mathcal{C})), \quad (13)$$

pričom  $\mathcal{A}(\mathcal{C})$  je veľkosť plochy  $\mathcal{C}$  a veličina  $\sigma$  sa nazýva *strunové napätie*. Ak kvarky nie sú uväznené, tak sa Wilsonova slučka správa podľa *zákona obvodu* (angl. *perimeter law*):

$$\langle W(\mathcal{C}) \rangle \sim \exp(-\mu \mathcal{P}(\mathcal{C})), \quad (14)$$

pričom  $\mathcal{P}(\mathcal{C})$  označuje dĺžku obvodu plochy  $\mathcal{C}$ .

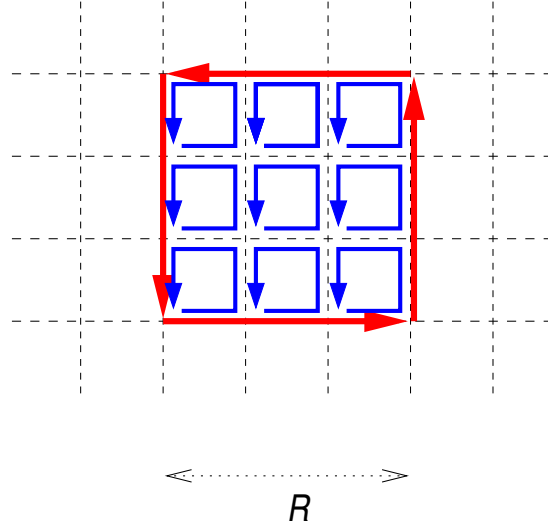
Wilsonova slučka súvisí s potenciálom interakcie medzi ťažkým kvarkom a antikvarkom vo vzdialenosti  $R$ . Vo fáze uväznenia

$$\langle W(\mathcal{C}) \rangle \sim \exp(-V(R)T) \sim \exp(-\sigma RT), \quad (15)$$

t.j. potenciál rastie na veľkých vzdialenostiach lineárne s  $R$ : na oddelenie kvarku a antikvarku je potrebná (v princípe) nekonečná energia.

V teórii na mriežke je možné dokázať uväznenie v zmysle (13) pomerne jednoducho v limite silnej väzby, t.j. pre  $\beta \rightarrow 0$ . V integráli (12) je treba rozvinúť účinok do Taylorovho radu v mocninách  $\beta$ . Vedúci príspevok pochádza od člena, v ktorom je Wilsonova slučka pokrytá plaketami, ako to zobrazuje obr. 4. L'ahko sa možno presvedčiť, že v takom prípade platí zákon plochy

$$\langle W(\mathcal{C}) \rangle \sim \beta^{\mathcal{A}(\mathcal{C})} + \dots \quad \text{a} \quad \sigma \sim -\ln(\beta) + \dots \quad (16)$$



4/ Vedúci príspevok v limite silnej väzby: Wilsonova slučka pokrytá plaketami.

Žiaľ, spojená limita (pozri vyššie) zodpovedá opačnému prípadu,  $\beta \rightarrow \infty$ , ktorý je možné (nateraz?) skúmať iba numerickými metódami.

V počítačových simuláciách QCD na mriežke sa využíva metóda Monte Carlo, vhodná na numerický výpočet násobných integrálov cez veľký počet premenných. Len pre ilustráciu uvediem, že v prípade teórie s kalibračnou grupou SU(2) na pomerne malej mriežke veľkosti  $8^4$  predstavuje veličina (6) integrál cez takmer 50 000 premenných, kým v prípade SU(3) na mriežke veľkosti  $24^4$  sa integruje cez viac ako 10 miliónov premenných! V praktickom výpočte sa integrál (6) nahrádza strednou hodnotou operátora  $\hat{O}$  cez  $N_{\text{conf}}$  náhodných konfigurácií poľa  $\{U_\mu\}$ , ktoré majú pravdepodobnostné rozdelenie  $\exp(-S_W[U])$ :

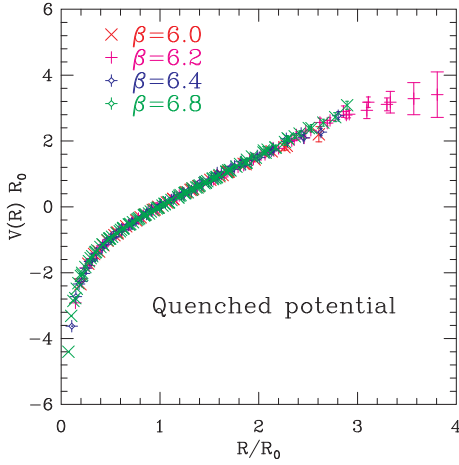
$$\langle \hat{O} \rangle = \frac{1}{N_{\text{conf}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{conf}}} O[\{U\}_i]. \quad (17)$$

Na generovanie nezávislých konfigurácií so správnym pravdepodobnostným rozdelením sa často využíva tzv. *Metropolisov algoritmus* [12].

Numerické simulácie naznačujú, že aj v spojitom limite sú kvarky uväznené, potenciál medzi ťažkým kvarkom a antikvarkom rastie lineárne so vzdialenosťou. Výsledky ilustruje obr. 5.

## CENTRÁLNE VORTEXY A UVÄZNENIE FARBY

Jasná a všeobecne akceptovaná fyzikálna predstava o tom, aký mechanizmus zabezpečuje uväznenie farby, doteraz chýba. Súvisí to aj so skutočnosťou, že v QCD dostatočne nepoznáme vlastnosti jej základného stavu (“vákua”), ktorý v každej kvantovej teórii poľa hrá najvyššiu dôležitú úlohu. Znalosť vákua teórie impli-



5/ Medzikvarkový potenciál v mriežkovej QCD bez dynamických kvarkov. (Prevzaté z Guptovej prednášky [13], pôvodný výsledok bol uverejnený v článku [14].)

kuje (prínajmenšom teoreticky) mnohé vlastnosti spektra excitácií. Dnes sa zdá nepochybné, že vlastnosti základného stavu QCD a mechanizmus uväznenia farby súvisia s netriviálnymi topologickými vlastnosťami teórie. V neabelovských kalibračných teóriách viacerí autori identifikovali konfigurácie kalibračných polí s komplikovaným topologickým obsahom, ktoré hrajú pravdepodobne dôležitú úlohu vo vákuu. Príkladmi sú *instantóny* [15], *meróny* [16], *abelovské monopóly* [17] a *centrálne vortexy* [18]. V posledných rokoch boli vyvinuté viaceré efektívne metódy na identifikáciu a štúdium týchto konfigurácií v simuláciách QCD na mriežke. Naša skupina navrhla metódu na identifikáciu centrálnych vortexov v mriežkových konfiguráciách a získala celý rad zaujímavých výsledkov, ktoré naznačujú ich význačnú úlohu v mechanizme uväznenia kvarkov a gluónov. Aj keď nie je možné vylúčiť závažnosť iných známych (alebo doteraz neobjavených) konfigurácií polí, sústredím sa vo zvyšku tohto príspevku predovšetkým na centrálné vortexy a súhrn niektorých výsledkov, ktoré sa ich týkajú.

Sformulujem teraz hypotézu o uväznení kvarkov trochu inak, s dôrazom na úlohu, ktorú hrá centrum farebnej grupy<sup>4</sup>. Už som spomínal, že v prírode sa kvarky, antikvarky a gluóny vyskytujú iba v “bezfarebných” stavoch, v stavoch, ktoré sú singletmi farebnej grupy. V prípade 3 farieb sa kvarky transformujú podľa fundamentálnej reprezentácie SU(3) (ako triplet,  $\mathbf{3}$ ), antikvarky ako anti-triplet ( $\bar{\mathbf{3}}$ ), gluóny podľa pridruženej reprezentácie (oktet,  $\mathbf{8}$ ). Kombinácia kvarku a antikvarku obsahuje farebný singlet,  $\mathbf{1} (\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8})$ , podobne kombinácia

troch kvarkov ( $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{10}$ ), dvoch gluónov ( $\mathbf{8} \otimes \mathbf{8} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{10} \oplus \bar{\mathbf{10}} \oplus \mathbf{27}$ ), troch gluónov ( $\mathbf{8} \otimes \mathbf{8} \otimes \mathbf{8} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \dots$ ), atď. Je možné si predstaviť aj farebné náboje z vyšších reprezentácií grupy, napríklad sextetnej ( $\mathbf{6}$ ); hoci sa zrejme nevyskytujú ako elementárne konštituenty, objavujú sa napríklad v kombinácii dvoch kvarkov ( $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \bar{\mathbf{3}} \oplus \mathbf{6}$ ). Podľa hypotézy o uväznení kvarkov budú ťažké kvarky a antikvarky na väčších vzdialenostiach spojené prúdom trubícou so strunovým napätím  $\sigma$ , aká bude ale sila napr. medzi kvarkom a antikvarkom zo sextetnej reprezentácie? Odpoveď je v prípade troch farieb jednoduchá: na veľkých vzdialenostiach bude sextetný náboj odtienený farebným nábojom gluónu a výsledný efektívny náboj bude rovnaký ako v prípade tripletného náboja (v jazyku teórie grup  $\mathbf{6} \otimes \mathbf{8} = \bar{\mathbf{3}} \oplus \dots$ ). Na asymptotických vzdialenostiach, po uväznení tienenia gluónmi, budú mať všetky vyššie “neodtieniteľné” náboje rovnaké strunové napätie ako kvarky a antikvarky.

Uvedené skutočnosti je možné vyjadriť aj formálnejšie, zavedením charakteristiky, ktorej sa hovorí *trialita* a nadobúda hodnoty 0, 1 a 2: Na veľkých vzdialenostiach bude strunové napätie nulové pre všetky farebné náboje s nulovou trialitou (singlety a náboje, ktoré môžu dať singlet kombináciou s gluónom) a nenulové a rovnaké pre náboje s trialitou 1 (tie, ktorých efektívny náboj po odtienení gluónom je rovnaký ako náboj kvarku) a 2 (tie, ktorých efektívny náboj po odtienení gluónom je rovnaký ako náboj antikvarku). Tri rôzne hodnoty triality súvisia s tým, ako sa rôzne reprezentácie farebnej grupy SU(3) správajú pri transformáciách z jej centra,  $Z_3$ , ktoré má tri prvky.

Vo všeobecnom prípade grupy SU( $N$ ) sa reprezentácie grupy dajú roztriediť podľa hodnoty *N-ality*. *N-alita* (v matematickej literatúre označovaná ako “trieda reprezentácie”, angl. *representation class*) určuje, ako sa príslušná reprezentácia Lieovej grupy transformuje pri transformáciách z centra grupy. V prípade grupy SU( $N$ ) centrum tvoria prvky

$$z_n = \mathbf{1}_N \exp\left(\frac{2\pi i n}{N}\right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (18)$$

kde  $\mathbf{1}_N$  je jednotková  $N \times N$  matica. Týchto  $N$  prvkov tvorí diskretnú abelovskú podgrupu grupy SU( $N$ ), ktorá sa označuje  $Z_N$ .

Existuje nekonečný počet reprezentácií grupy SU( $N$ ), no každá z nich patrí do jednej z konečného počtu  $N$  podmnožín. Fyzikálnejšie možno túto skutočnosť vyjadriť nasledujúcim spôsobom: V  $k$ -tej podmnožine (podmnožine s  $N$ -alitou  $k$ ) má najmenšiu dimenziu  $d_k$  reprezentácia  $r_k$ , ktorej Youngov diagram tvorí stĺpec s  $k$  štvorčekmi. Okrem tejto reprezentácie tam patria všetky farebné reprezentácie  $r$  dimenzie  $d_r$ , ktoré môžu byť gluónmi odtienené na reprezentáciu  $r_k$  s dimenziou

<sup>4</sup>Centrum grupy je množina všetkých prvkov grupy, ktoré komutujú navzájom a so všetkými ostatnými prvkami danej grupy.

$d_k$ . Zapísané symbolicky:

$$\mathbf{d}_r \otimes \mathbf{d}_A [\otimes \mathbf{d}_A \otimes \dots] = \mathbf{d}_k \oplus \dots \quad (19)$$

( $d_A = N^2 - 1$  je dimenzia pridruženej reprezentácie, do ktorej patria gluóny). Na veľkých vzdialenostiach (v porovnaní so škálou tienenia) budú farebné náboje z  $k$ -tej triedy mať rovnaké strunové napätie,  $\sigma_k$ . Najnižšia reprezentácia s  $N$ -alitou  $N - k$  je komplexne združená s najnižšou reprezentáciou s  $N$ -alitou  $k$ , preto  $\sigma_{N-k} = \sigma_k$  pre  $0 < k \leq N/2$ . V teórii s  $N$  farbami má reprezentácia s nulovou  $N$ -alitou nulové strunové napätie a existuje  $[N/2]$  rôznych strunových napätí  $\sigma_k$  pre farebné náboje z reprezentácií s  $N$ -alitou  $k \neq 0$ .<sup>5</sup>

Skutočnosť, že strunové napätia závisia len od  $N$ -ality farebných nábojov, poukazuje na význačnú úlohu centra grupy v mechanizme uväznenia farby a každý realistický model uväznenia sa musí usilovať nájsť pre tento fakt vysvetlenie. Vortexový model uväznenia, ktorého základnú myšlienku sformuloval 't Hooft [18], je v tomto smere prirodzeným kandidátom, keďže existencia vortexových excitácií a ich vlastnosti priamo súvisia s centrom kalibračnej grupy.

't Hooft vo svojej priekopníckej práci [18] zaviedol operátor  $B(\mathcal{C}')$ , ktorý kreuje tenký centrálny vortex na slučke  $\mathcal{C}'$  v pevnom časovom okamihu  $t$ . Ak sa táto slučka pretína so slučkou  $\mathcal{C}$ , Wilsonov a 't Hooftov operátor spĺňajú komutačný vzťah

$$W(\mathcal{C})B(\mathcal{C}') = zB(\mathcal{C}')W(\mathcal{C}), \quad z \in Z_N. \quad (20)$$

Vychádzajúc z tohto komutačného vzťahu 't Hooft ukázal [18], že správanie operátora  $B(\mathcal{C}')$  je opačné ako pri operátore  $W(\mathcal{C})$ :

$$\langle B(\mathcal{C}') \rangle \sim \begin{cases} e^{-\mu' \mathcal{P}(\mathcal{C}')} & \text{vo fáze uväznenia,} \\ e^{-\sigma' \mathcal{A}(\mathcal{C}')} & \text{vo fáze bez uväznenia.} \end{cases} \quad (21)$$

V analógii so štatistickou fyzikou možno jeden z operátorov považovať za parameter "usporiadanosť" a druhý za parameter "neusporiadanosť" fáz silne interagujúcej kalibračnej teórie.

Podstatou vortexového modelu je hypotéza, že vákuum QCD je zaplnené centrálnymi vortexami, ktoré si možno predstaviť ako trubice (v 3 časopriestorových rozmeroch) alebo plochy konečnej hrúbky (v 4 rozmeroch) s kvantovaným (chromo-)magnetickým tokom; že vortexy *kondenzujú* vo vákuu QCD. Takýto predpoklad vedie prirodzene k uväzneniu, presnejšie povedané, k poklesu strednej hodnoty Wilsonovej slučky podľa zákona plochy. Argument (pre jednoduchosť pre 3 rozmery a grupu SU(2)) je nasledovný: Predstavme si, že plochu  $\mathcal{A}(\mathcal{C})$  veľkej Wilsonovej slučky rozdelíme na  $n$  menších plôšiek veľkosti  $\mathcal{A}_{\min}$ ,  $n = \mathcal{A}(\mathcal{C})/\mathcal{A}_{\min}$ . Predpokladajme, že pravdepodobnosť, že vortexová trubica presekne

<sup>5</sup>Funkcia  $[x]$  dáva celú časť reálneho čísla  $x$ .

plôšku  $\mathcal{A}_{\min}$ , je  $f$  a že preseknutia jednotlivých plôšiek sú navzájom nekorelované. Pri preseknutí slučky vortexom sa Wilsonov operátor vynásobí elementom centra; v prípade SU(2) existuje jediný netriviálny element,  $-\mathbf{1}$ . Za týchto predpokladov je zrejmé, že

$$\begin{aligned} \langle W(\mathcal{C}) \rangle &\sim [(1-f) \times 1 + f \times (-1)]^n \\ &= (1-2f)^{\mathcal{A}(\mathcal{C})/\mathcal{A}_{\min}} \equiv \exp[-\sigma \mathcal{A}(\mathcal{C})], \end{aligned} \quad (22)$$

kde

$$\sigma = -\frac{1}{\mathcal{A}_{\min}} \ln(1-2f) \approx 2f/\mathcal{A}_{\min}. \quad (23)$$

Uvedený argument je síce jednoduchý a presvedčivý, ale zároveň aj naivný a modelovo závislý. Ukázať, že centrálny vortexy skutočne plnia predpokladanú úlohu v mechanizme uväznenia, si vyžaduje hlbšiu teoretickú analýzu a/alebo numerické simulácie úplnej teórie.

## CENTRÁLNE VORTEXY NA MRIEŽKE

Hlavná myšlienka vortexového mechanizmu uväznenia je sformulovaná kalibračne invariantným spôsobom; ak však chceme model podrobiť testom na mriežke, je vhodné pozerať na vortexový obsah konfigurácií vo vhodne zvolenej kalibrácii. Dôvod je nasledovný: Ak máme nejakú konfiguráciu kalibračných polí, potom pridať do nej vortex je ľahké. Oveľa komplikovanejšia je opačná úloha – identifikovať centrálny vortexy v zadanej konfigurácii, napr. takej, ktorú nám poskytuje Metropolisov algoritmus. Existuje však trieda kalibrácií, kde takáto identifikácia možná je.

Na identifikáciu vortexov v rovnovážnych mriežkových konfiguráciách sme navrhli procedúru [19], ktorá pozostáva z nasledujúcich krokov (vzťahy uvádzam pre kalibračnú grupu SU(2)):

1. Uskutočníme kalibračnú transformáciu mriežkových premenných  $U_\mu(x)$  pomocou matic  $\Omega(x)$ :

$$U_\mu^{(\Omega)}(x) = \Omega(x)U_\mu(x)\Omega^\dagger(x + \hat{\mu}), \quad (24)$$

pričom sa ich snažíme vybrať tak, aby bola hodnota

$$\mathcal{R}[U] \equiv \sum_{x,\mu} \left| \text{Tr} \left[ U_\mu^{(\Omega)}(x) \right] \right|^2 \quad (25)$$

maximálna. Vďaka kalibračnej podmienke (25) sú transformované matice  $U_\mu^{(\Omega)}(x)$  čo najbližšie k prvkom centra grupy  $\pm \mathbf{1}$ , preto sa zvykne hovoriť o *maximálnej centrálnej kalibrácii* (MCK).

2. Ďalším krokom je *centrálna projekcia*, pri ktorej nahradíme maticu na linku v MCK najbližším elementom centra grupy; v SU(2):

$$U_\mu(x) \rightarrow Z_\mu(x) \equiv \text{sign Tr}[U_\mu(x)] \mathbf{1}_2. \quad (26)$$

3. Výsledkom centrálnej projekcie je konfigurácia premenných z grupy  $Z_2$  na mriežkových linkoch. V nej ľahko identifikujeme tenké vortexové excitácie, ktoré sme nazvali *P-vortexami* (“projekčnými vortexami”).

Fyzikálny význam procedúry fixovania maximálnej centrálnej kalibrácie a následnej centrálnej projekcie je možné vysvetliť ako hľadanie optimálneho fitu reálnej konfigurácie súborom tenkých centrálnych (projekčných) vortexov.

V konfiguráciách linkových premenných, ktoré získame centrálnou projekciou v maximálnej centrálnej kalibrácii, nadobúdajú plakety hodnoty  $\pm 1$ . Plaketu, ktorej hodnota je  $(-1)$ , nazývame *P-plaketou*, súbory takýchto plaket tvoria *P-vortexy*. Je samozrejme otázne, či *P-vortexy* v  $Z_2$ -konfiguráciách majú niečo spoločné s centrálnymi vortexami v úplných konfiguráciách alebo s inými konfiguráciami kalibračných polí, ktoré by mohli byť zodpovedné za uväznenie farby. Túto a podobné otázky naša i ďalšie skupiny skúmali v rozsiahlych numerických simuláciách QCD na mriežke; výsledkom je súbor zistení, ktoré ukazujú, že vortexy identifikované pomocou našej procedúry hrajú dôležitú úlohu v mechanizme uväznenia farby i v ďalších javoch, napr. pri narušení chirálnej symetrie.

**Centrum grupy je dominantné.** Prvou výnimočnou skutočnosťou je jav, ktorý sme nazvali *dominantnosťou centra*. V úplných mriežkových konfiguráciách môžeme určiť strednú hodnotu obdĺžnikovej Wilsonovej slučky veľkosti  $R \times T$ , pozri rovnicu (12). Táto veličina nezávisí od zvolenej kalibrácie a vo fáze uväznenia sa správa podľa zákona plochy (13). Hodnotu strunového napätia  $\sigma$  možno určiť napr. z tzv. Creutzových pomerov:

$$\chi(R, T) = -\frac{1}{a^2} \ln \left[ \frac{\langle W(R+a, T+a) \rangle \langle W(R, T) \rangle}{\langle W(R, T+a) \rangle \langle W(R+a, T) \rangle} \right], \quad (27)$$

pričom

$$\chi(R, T) \rightarrow \sigma \quad \text{pre} \quad R, T \gg a. \quad (28)$$

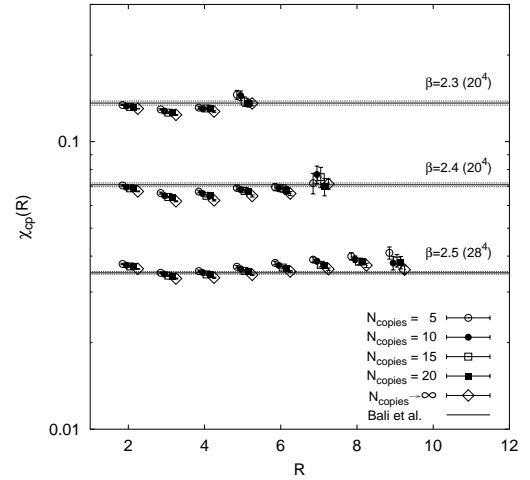
Podobne – po centrálnej projekcii v MCK – môžeme určiť strednú hodnotu podobnej Wilsonovej slučky skonštruovanej z centrálnych linkových premenných:

$$Z(R, T) = \left\langle \frac{1}{2} \text{Tr} \left( \prod_{l \text{ dookola } R \times T} Z_l \right) \right\rangle \quad (29)$$

Ukazuje sa [19, 20], že

1. asymptotické strunové napätie, určené z centrálnych premenných v MCK, je veľmi (a prekvapujúco) blízke jeho hodnote v úplnej teórii (*dominantnosť centra*); odchýlka od najpresnejších hodnôt nameraných v úplnej teórii [21] je menšia ako 10%;

2. hodnota Creutzových pomerov takmer nezávisí od  $R$ ; centrálna projekcia odstránila všetky krátkodosahové príspevky k medzikvarkovému potenciálu (tento jav



6/ Creutzove pomery  $\chi_{cp}(R)$ , určené po centrálnej projekcii v MCK, ako funkcie  $R$ . Vodorovné pásy reprezentujú akceptované hodnoty asymptotického strunového napätia v úplných mriežkových konfiguráciách podľa [21].

sme nazvali *predčasná linearita*, angl. *precocious linearity*).

Uvedené skutočnosti ilustruje obr. 6.

**P-vortexy lokalizujú centrálnu vortexy.** Netriviálnymi excitáciami v  $Z_2$ -konfiguráciách po centrálnej projekcii sú *P-vortexy*, t.j. tenké centrálnu vortexy (ich charakteristická hrúbka je určená mriežkovou konštantou  $a$ ). To neznamena automaticky, že im v reálnych konfiguráciách zodpovedajú naozaj centrálnu vortexy.

V simuláciách sme preto určovali strednú hodnotu Wilsonových slučiek, na minimálnej ploche ktorých sa – po fixovaní do MCK a centrálnej projekcii – nachádzajú 0, 1, 2, ...,  $P$ -plakety. Tieto veličiny sme označili  $W_n(C)$ . Je pritom treba zdôrazniť, že index  $n$  slúži len na roztriedenie slučiek, hodnoty slučiek boli pritom počítané v úplných konfiguráciách.

Ak *P-vortexy* (približne) lokalizujú skutočné centrálnu vortexy, potom očakávame  $W_n(C)/W_0(C) \rightarrow (-1)^n$ , čo je možné testovať numericky.

Ilustratívny výsledok zobrazuje obr. 7 pre  $n = 1, 2$  [19]. Je zrejme, že jednoduchá predpoveď nie je splnená pre malé plochy slučiek, až pre dostatočne veľké slučky naozaj  $W_1(C) \rightarrow -W_0(C)$  a  $W_2(C) \rightarrow W_0(C)$ . Zdá sa preto, že centrálnu vortexy sú objekty pomerne hrubé. Podobne pomer slučiek s párnym a nepárnym počtom  $P$ -plaket sa asymptoticky blíži k  $(-1)$ .

**P-vortexy lokalizujú fyzikálne objekty.** Ak vortexom zodpovedajú fyzikálne objekty, potom ich hustota ako funkcia väzbovej konštanty  $\beta$  musí vykazovať správne škálovacie správanie pri veľkých hodnotách  $\beta$  (podobné

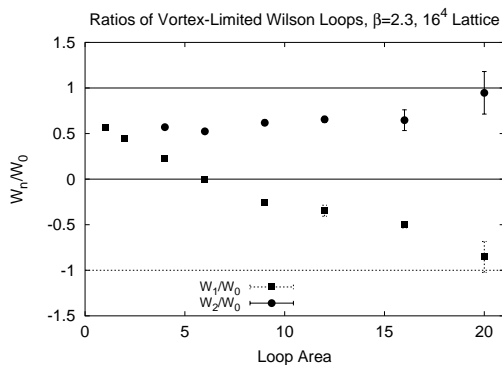


ako vo vzťahu (11); pozri aj diskusiu v závere článku [7]).  $P$ -vortexy sú lokalizované niekde blízko stredu hrubých centrálnych vortexov úplných konfigurácií a majú v štyroch rozmeroch topológiu plôch. Ak centrálné vortexy škálujú, mala by škálovať aj hustota  $P$ -vortexov, a síce rovnako ako asymptotické strunové napätie  $\sigma$ . Správne škálovacie správanie hustoty  $P$ -vortexov bolo po prvýkrát pozorované v práci Langfelda, Reinhardta a Tennerta [22] a potom potvrdené aj v našej práci [19].

**Centrálné vortexy sú korelované s uväznením kvarkov, narušením chirálnej symetrie a topologickými vlastnosťami teórie.** Táto korelácia bola demonštrovaná veľmi presvedčivo v práci de Forcranda a D’Eliu [23]. Uskutočnili nasledujúci numerický experiment: Z konfigurácií kalibračných polí eliminovali vortexy tak, že pôvodné mriežkové premenné  $U_\mu(x)$  vynásobili faktormi  $Z_\mu(x)$ , určenými centrálnou projekciou v MCK. (Fyzikálne táto procedúra zodpovedá tomu, že sme blízko stredu hrubého centrálného vortexu umiestnili opačný tenký antivortex.) V takto modifikovaných konfiguráciách pozorovali, že:

1. asymptotické strunové napätie je nulové;
2. vymizne narušenie chirálnej symetrie,
3. všetky modifikované (bezvortexové) konfigurácie majú nulový topologický náboj, sú topologicky triviálne.

**Prechod medzi fázou uväznenia a fázou bez uväznenia možno chápať ako deperkolačný fázový prechod.** V QCD sa očakáva existencia fázového prechodu z fázy uväznenia do fázy bez uväznenia (fázy “kvarkovo-gluónovej plazmy”) pri konečnej teplote. Fázový prechod vo vortexovom modeli podrobne skúmala tübingenská [24] i naša skupina [25]. Vo fáze uväznenia väčšina  $P$ -plakiet patrí k jednému obrovskému zhluku (klastru), ktorý vyplnía takmer celý objem mriežky (*perkoluje*



7/ Pomer Wilsonových slučiek s jedným a dvoma vortexami k strednej hodnote bezvortexových slučiek ako funkcia plochy slučky pri  $\beta = 2.3$ .

v objeme mriežky). Pri fázovom prechode sa perkolačné charakteristiky centrálnych vortexov dramaticky menia.

Celý rad ďalších výsledkov, ktoré demonštrujú dôležitú úlohu centrálnych vortexov, uvádza nedávny prehľad [26].

## VORTEXY A INÉ MODELY UVÄZNENIA

Rôzne prístupy k problému uväznenia farby v QCD majú sklon študovať izolované aspekty tohto javu a zabudovať získané vedomosti a informácie do nejakej modelovej schémy. Pritom žiadna schéma doteraz “nevít’azí”, viaceré obrazy poskytujú vcelku uspokojivý opis (mnohých, no nie všetkých aspektov) javu. Situácia pripomína staré orientálne podobenstvo o slepcoch a slonovi: slepci, dotýkajúc sa rôznych častí tela rozmerného zvierat’a, sa na základe svojich rozličných hmatových vnemov márne dohadovali o tom, ako môže zviera vyzerat’ ako celok. Každá predstava bola iná a zachytávala časť reality, no všetky zároveň boli na míle vzdialené od výzoru skutočného slona.

Poučením, ktoré si možno vziať zo starého príbehu, je potreba hľadať skôr spoločné, ako odlišné črty rôznych modelov uväznenia, nachádzať miesta, kde sa rôzne obrazy prekrývajú. Uvediem preto na záver tohto článku dva príklady, ako model kondenzácie centrálnych vortexov úzko súvisí s inými modelmi uväznenia.

Jeden z populárnych modelov uväznenia (pozri napr. prehľad [27]) vysvetľuje jav ako dôsledok kondenzácie tzv. abelovských monopólov vo vákuu QCD.<sup>6</sup> Postup je podobný ako v predchádzajúcej kapitole; opäť sa uskutoční prechod do špeciálnej kalibrácie, tentoraz tzv. maximálne abelovskej kalibrácie, kde sa pomocou tzv. abelovskej projekcie izolujú konfigurácie abelovských monopólov a študuje sa ich korelácia s javom uväznenia. Ukazuje sa však, že monopóly a centrálné vortexy zrejme nie sú navzájom nezávislé. V práci [28] bolo ukázané, že monopóly a antimonopóly sa takmer výlučne nachádzajú na plochách centrálnych vortexov. Kondenzácia monopólov by tak mohla byť púhym dôsledkom toho, že vo vákuu QCD kondenzujú centrálné vortexy.

Zaujímavý je tiež súvis centrálnych vortexov so zdanlivo úplne odlišnou predstavou o uväznení, ktorú sformulovali Gribov a Zwanziger [29]. Tu sa ukazuje vhodné prejsť do tzv. coulombovskej kalibrácie, v ktorej potenciály poľa spĺňajú podmienku

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}^a(x) = 0. \quad (30)$$

Prednosťou coulombovskej kalibrácie je skutočnosť, že v nej sú eliminované nefyzikálne stupne voľnosti. Kla-

<sup>6</sup>Mechanizmus tu je podobný ako v teórii supravodivosti, kde dochádza k vzniku kondenzátu elektricky nabitých Cooperových párov. V QCD by mali kondenzovať objekty s farebnými magnetickými nábojmi [17], preto sa často hovorí o jave *duálnej supravodivosti*.

sický hamiltonián QCD tu má jednoduchý tvar:

$$H = H_{glue} + H_{coul}, \quad (31)$$

$$H_{glue} = \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \left( \vec{E}^a \cdot \vec{E}^a + \vec{B}^a \cdot \vec{B}^a \right), \quad (32)$$

$$H_{coul} = \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} d^3\vec{y} \varrho^a(x) K^{ab}(x, y; A) \varrho^b(y), \quad (33)$$

$$\varrho^a = \varrho_{\text{matter}}^a - g f^{abc} \vec{A}^b \cdot \vec{E}^c. \quad (34)$$

( $\varrho$  je hustota farebných nábojov, tak vonkajších, ako aj príspevku náboja gluónov.) Dôležitú úlohu v ňom zohráva tzv. Faddejevov–Popovov (FP) operátor,

$$M(A) \equiv -\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(A) = -\Delta \delta^{ac} + g f^{abc} \vec{A}^b \cdot \vec{\nabla}, \quad (35)$$

ktorý vstupuje do interakčného jadra

$$K^{ab}(x, y; A) \equiv [M^{-1} (-\nabla^2) M^{-1}]_{x,y}^{a,b}. \quad (36)$$

Ako bolo ukázané v priekopníckom Gribovovom článku [29], prechod do coulombovskej kalibrácie je ťažší v QCD ako v QED, lebo podmienka (30) neeliminuje kalibračnú voľnosť úplne. Gribov preto navrhol obmedziť sa na také polia, pre ktoré je FP operátor pozitívne definitný, tzv. *Gribovovu oblasť*. Gribovova oblasť je konvexná a ohraničená, jej hranica sa nazýva *Gribovov horizont*.<sup>7</sup>

Podstata Gribovovho–Zwanzigerovho mechanizmu uväznenia sa dá vysvetliť nasledovne: Priestor konfigurácií kalibračných polí v Gribovovej oblasti je obrovský, no vo všetkých smeroch ohraničený. Je preto rozumné očakávať, že väčšina konfigurácií leží blízko jej hranice, Gribovovho horizontu. (Je to podobné ako v prípade  $d$ -rozmernej gule. Pre veľké hodnoty  $d$  objemový element  $r^{d-1} dr$  prudko narastá, keď sa blížime k povrchu gule, a dominantný príspevok k objemu gule dáva tenká vrstva pri jej povrchu.) Jadro  $K$  v rovnici (36), ktoré určuje energiu interakcie medzi farebnými nábojmi, obsahuje inverzný FP operátor. Pritom FP operátor je nulový na Gribovovom horizonte a blízky k nule v jeho okolí. Vysoká hustota poľných konfigurácií pri horizonte tak môže viesť k výraznému zvýšeniu interakčnej energie farebných nábojov a k uväzneniu farby.

Niektoré jednoduché predpovede Gribovovho–Zwanzigerovho scenára uväznenia a jeho súvis s centrálnymi vortexami sme nedávno skúmali v mriežkových simuláciách [30]. Sústredili sme sa na spektrum vlastných stavov FP operátora (35) v rôznych súboroch konfigurácií kalibračných polí v coulombovskej kalibrácii. Je možné dokázať, že nutnou podmienkou

uväznenia farebných nábojov je

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\rho(\lambda) F(\lambda)}{\lambda} > 0, \quad (37)$$

kde  $\rho(\lambda)$  je hustota vlastných stavov a  $F(\lambda)$  je stredná hodnota laplaciánu v stave s vlastnou hodnotou  $\lambda$ . V úplných mriežkových konfiguráciách a v konfiguráciách tenkých centrálnych vortexov je táto podmienka splnená. Ak však vortexy odstránime pomocou procedúry de Forcranda a D’Eliu, ktorú sme opísali vyššie, tak podmienka (37) nie je splnená a spektrum vlastných stavov FP operátora sa podobá spektru teórie bez interakcie. Dokázali sme tiež, že konfigurácie tenkých centrálnych vortexov ležia priamo na Gribovovom horizonte, okolo ktorého sa sústreďujú konfigurácie relevantné pre uväznenie.

## OTVORENÝ KONIEC

Kvantová chromodynamika, teória silných interakcií elementárnych častíc, vstúpila do Kristových rokov. Problému uväznenia bolo doteraz venované nespočetné množstvo článkov a do jeho riešenia bol zapojený nemalý intelektuálny potenciál. Napriek tomu “miliónová otázka” Clayovho matematického inštitútu ostáva nezodpovedaná a lukratívna odmena čaká na príjemcu.

V poslednom období bol zaznamenaný pokrok v oblasti mriežkových simulácií a zásadne výsledky priniesli aj “čisto teoretické” prístupy, ktoré tu neboli diskutované. Teória strún prispela nádejším výsledkom v podobe Maldacenevej hypotézy [31] o súvisе istých strunových teórií so supersymetrickými kalibračnými teóriami. Významným príspevkom bola práca Seiberga a Wittena [32] o dualite a uväznení farby v supersymetrickej kalibračnej teórii. Spomínané práce – a celý rad ďalších – však neriešia problém uväznenia v reálnej chromodynamike a ich relevantnosť je preto stále otázná.

Numerické simulácie, hlavne výsledky z posledných niekoľkých rokov, ukázali, že mriežková formulácia QCD je vhodná nielen na výpočet vlastností hadrónov vychádzajúc z prvých princípov, ale je aj laboratóriom na skúmanie otázok, ktoré súvisia s mechanizmom uväznenia. Pokrok v identifikácii dôležitých poľných konfigurácií je neoddiskutovateľný; prívrženci každého z modelov v posledných rokoch prehľbili poznanie o úlohe a vlastnostiach rôznych topologických štruktúr a pre mňa je zvlášť potešiteľné, že sme so spolupracovníkmi mali na tomto pokroku podiel.

Jednoznačné odpovede na otázky sme však stále nedostali. Mriežkové výpočty poskytujú náznaky, nie dôkazy. Nie sú (prínajmenšom nateraz) schopné niektorú z alternatív jednoznačne vylúčiť a iné bezvýhradne potvrdiť. Každý z alternatívnych mechanizmov má svoje prednosti, no zároveň aj nedostatky.

<sup>7</sup>Pre zasväteného čitateľa dodám, že ani obmedzenie na Gribovovu oblasť problém fixovania coulombovskej kalibrácie v QCD úplne nerieši. Je potrebné obmedziť sa ďalej na polia z tzv. *fundamentálnej modulárnej oblasti*. Na podstate kvalitatívneho argumentu, ktorý nasleduje, však toto upresnenie nič nemení.

Je teda zrejme, že riešenie problému uväznenia čaká na prelom, možno na revolučnú myšlienku. Stále nám chýba analytická metóda, vhodná na štúdium neabelovských kalibračných teórií na veľkých vzdialenostiach.

Problém uväznenia tak ostáva naďalej s nami: ako istá forma výčitky za neúspechy doterajších pokusov, ako zaujímavá a stále provokujúca výzva.

## POĎAKOVANIE

Výsledky, ktoré sú zhrnuté v kapitolách o centrálnych vortexoch, vznikli v priebehu mojej viac ako desaťročnej spolupráce s Jeffom Greensitom zo Štátnej univerzity v San Franciscu. Je ťažké stručne vyjadriť, aké potešenie mi táto spolupráca prináša. Vďačný som aj ďalším spolupracovníkom: Luigimu Del Debbiovi z University v Pise, Manfredovi Faberovi a Romanovi Bertle z TU vo Viedni a Danielovi Zwanzigerovi z Univerzity v New Yorku.

Môj výskum v posledných rokoch sčasti podporili Vedecký výbor NATO, Akcia Rakúsko–Slovensko, Vedecká grantová agentúra Ministerstva školstva SR a SAV (grant VEGA č. 2/3106/2003) a Agentúra pre podporu vedy a techniky (grant č. APVT–51–005704).

## Literatúra

- [1] H. Fritzsch, M. Gell-Mann: *Proc. XVI Int. Conf. on High Ener. Phys.*, ed. J. D. Jackson, A. Roberts. Chicago, 1972. s. 135, arXiv:hep-ph/0208010.<sup>8</sup>
- [2] D. J. Gross, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **135**, 193 (2004).
- [3] J. Chýla, Čs. čas. fyz. **A33**, 321 (1983).
- [4] Š. Olejník, Čs. čas. fyz. **A33**, 352 (1983).
- [5] J. Chýla, R. Kotecký, Čs. čas. fyz. **A35**, 433 (1985).
- [6] V. Janiš, Čs. čas. fyz. **A35**, 448 (1985).
- [7] R. Kotecký, J. Chýla, Čs. čas. fyz. **A36**, 102 (1986).
- [8] D. J. Gross, F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973); H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973); V. B. Beresteckij, Čs. čas. fyz. **A28**, 433 (1978); *Aktuality*, Čs. čas. fyz. **55**, 4 (2005).
- [9] A. M. Jaffe, E. Witten, pozri na <http://www.claymath.org>.
- [10] K. G. Wilson, Phys. Rev. **D10**, 2445 (1974).
- [11] M. Creutz, Phys. Rev. Lett. **43**, 553 (1979); **45**, 313 (1980).
- [12] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller, E. Teller, J. Chem. Phys. **21**, 1087 (1953).
- [13] R. Gupta: *Probing the Standard Model of Particle Interactions, Part 2*, ed. R. Gupta et al. Elsevier, Amsterdam 1999, s. 83, arXiv:hep-lat/9807028.
- [14] G. S. Bali, K. Schilling, Phys. Rev. **D47**, 661 (1993).
- [15] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Shvarts, Y. S. Tyupkin, Phys. Lett. **59B**, 85 (1975); T. Schäfer, E. V. Shuryak, Rev. Mod. Phys. **70**, 323 (1998), arXiv:hep-ph/9610451.
- [16] F. Lenz, J. W. Negele, M. Thies, Phys. Rev. **D69**, 074009 (2004), arXiv:hep-th/0306105.
- [17] G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B153**, 141 (1979); Nucl. Phys. **B190**, 455 (1981); S. Mandelstam: *Monopoles in Quantum Field Theory*, ed. N. S. Craigie, P. Goddard, W. Nahm. World Scientific, Singapore 1982, s. 289; Phys. Reports **67**, 109 (1980).
- [18] G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B138**, 1 (1978); G. Mack: *Recent Developments in Gauge Theories*, ed. G. 't Hooft et al. Plenum Press, New York 1980, s. 0217.
- [19] L. Del Debbio, M. Faber, J. Giedt, J. Greensite, Š. Olejník, Phys. Rev. **D58**, 094501 (1998), arXiv:hep-lat/9801027.
- [20] L. Del Debbio, M. Faber, J. Greensite, Š. Olejník, Phys. Rev. **D55**, 2298 (1997), arXiv:hep-lat/9610005.
- [21] C. Michael, M. Teper, Phys. Lett. **B199**, 95 (1987); G. S. Bali, K. Schilling, C. Schlichter, Phys. Rev. **D51**, 5165 (1995), arXiv:hep-lat/9409005.
- [22] K. Langfeld, H. Reinhardt, O. Tennert, Phys. Lett. **B419**, 317 (1998), arXiv:hep-lat/9710068.
- [23] Ph. de Forcrand, M. D'Elia, Phys. Rev. Lett. **82**, 4582 (1999), arXiv:hep-lat/9901020.
- [24] M. Engelhardt, K. Langfeld, H. Reinhardt, O. Tennert, Phys. Rev. **D61**, 054504 (2000), arXiv:hep-lat/9904004.
- [25] R. Bertle, M. Faber, J. Greensite, Š. Olejník, J. High Ener. Phys. **03**, 019 (1999), arXiv:hep-lat/9903023.
- [26] J. Greensite, Prog. Part. Nucl. Phys. **51**, 1 (2003), arXiv:hep-lat/0301023.
- [27] R. W. Haymaker, Phys. Reports **315**, 153 (1999), arXiv:hep-lat/9809094.
- [28] L. Del Debbio, M. Faber, J. Greensite, Š. Olejník: *New Developments in Quantum Field Theory*, ed. P. H. Damgaard, J. Jurkiewicz. Plenum Press, New York–London 1998, s. 47, arXiv:hep-lat/9708023.
- [29] V. N. Gribov, Nucl. Phys. **B139**, 1 (1978); D. Zwanziger, Nucl. Phys. **B518**, 237 (1998).
- [30] J. Greensite, Š. Olejník, D. Zwanziger, J. High Ener. Phys. **05**, 070 (2005), arXiv:hep-lat/0407032.
- [31] J. M. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998), arXiv:hep-th/9711200.
- [32] N. Seiberg, E. Witten, Nucl. Phys. **B426**, 19 (1994), arXiv:hep-th/9407087.

<sup>8</sup>Pri článkoch, ktorých úplné texty sú bezplatne dostupné na elektronickom preprintovom serveri, uvádzam príslušný odkaz v tvare arXiv:hep-xxx/yyymmnn. Abstrakt článku možno potom nájsť na adrese <http://www.arxiv.org/abs/hep-xxx/yyymmnn>, spolu s odkazmi na elektronické verzie úplného textu. Napr. abstrakt a odkaz na úplný text článku [1] sa nachádza na adrese <http://www.arxiv.org/abs/hep-ph/0208010>.